Pendule balistique

Département de Physique, Université de Fribourg

Romain De Groote, Elena Zurbriggen

21 novembre 2025

1 Introduction

La balistique est l'une des applications les plus courantes de la mécanique classique. Elle fut utilisée pour la première fois dans le domaine militaire au XVIème siècle par Niccolò Tartaglia, un mathématicien et ingénieur italien. Avec la formalisation de la physique par Newton un siècle plus tard, il devient possible de prédire les trajectoires des projectiles de manière précise à condition de connaître la position et la vitesse initiales. Là où la mesure de la position est triviale par le choix du repère, en ce qui concerne la vitesse, la tâche est bien plus ardue. En effet, comme l'objectif est d'envoyer un projectile loin, il est lancé à grande vitesse, rendant les mesures directes difficiles. Il faut alors passer par moyen détourné. Là où aujourd'hui des méthodes optiques à base de l'effet Doppler sont utilisées, la méthode classique est celle du pendule balistique, qui est toujours d'actualité dans le cadre de certaines expériences. [1]

2 But de l'expérience

L'objectif de cette expérience est de mesurer la vitesse initiale d'un projectile en utilisant un pendule balistique. Pour ce faire, un projectile est tiré dans un pendule physique qui va absorber une partie de l'énergie cinétique du projectile et se mettre en mouvement. En mesurant la hauteur maximale atteinte par le pendule après l'impact, il est possible de remonter à la vitesse initiale du projectile en utilisant les principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique. De plus, la conservation de la quantité de mouvement lors des collisions sera vérifiée. Le choc est supposé parfaitement inélastique. L'énergie potentielle élastique du canon sera mesurée avant le tir de manière à comparer la quantité d'énergie cinétique du projectile et donc par extension la quantité d'énergie cinétique transférée dans le pendule lors du choc.

3 Contexte théorique

Comme dit dans l'introduction, un pendule balistique permet de mesurer la vitesse à laquelle un projectile est expulsé. Dans le cadre de cette expérience une petite balle a été expulsée à l'aide d'un canon à ressort. Le principe est simple : le projectile de masse m est tiré à une vitesse v_0 contre le pendule de masse M initialement au repos. Lors de l'impact, le projectile s'enfonce dans le pendule dans une collision supposée parfaitement inélastique et le système pendule et projectile se met en mouvement à une vitesse v_p selon la loi de la conservation de la quantité de mouvement :

$$mv_0 = (m + M)v_p \tag{3.1}$$

Après l'impact, le système remonte jusqu'à une hauteur maximale $h = r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))$ où toute l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle gravitationnelle. Grâce au théorème de la conservation de l'énergie mécanique, on a :

$$(m + M)gh = \frac{1}{2}(m + M)v_p^2 \tag{3.2}$$

1. Source : wikipedia https ://fr.wikipedia.org/wiki/Balistique

En combinant les deux équations précédentes, on peut exprimer la vitesse initiale du projectile :

$$v \pm \delta v = \frac{1}{mr} * \sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))} \pm v \sqrt{\sum_{k=\{m,r,m+M,r_{\text{cm}},\Theta,\phi\}} \left(\frac{\partial v}{\partial k}\delta k\right)^2} [v] = \text{m}\,\text{s}^{-1} \quad (3.3)$$

où r_{cm} est la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse du pendule, r la distance entre l'axe de rotation et le point d'impact du projectile, et ϕ est l'angle maximal atteint par le pendule après l'impact. Les dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial m} &= -\frac{\sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}}{m^2 r}\delta m \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{\sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}}{mr^2}\delta r \\
\frac{\partial v}{\partial (m+M)} &= \frac{\sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}}{2mr(m+M)}\sqrt{\delta m^2 + \delta M^2} \\
\frac{\partial v}{\partial r_{\text{cm}}} &= \frac{\sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}}{2mrr_{\text{cm}}}\delta r_{\text{cm}} \\
\frac{\partial v}{\partial \Theta} &= \frac{\sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}}{2mr\Theta}\delta\Theta \\
\frac{\partial v}{\partial \phi} &= \frac{(m+M)g\Theta r_{\text{cm}}\sin(\phi)}{2+r\sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}}\delta\phi
\end{aligned}$$

Cependant, comme il est certain que r_{cm} ne sera pas parfaitement égal à la distance entre l'axe de rotation et le centre géométrique du pendule, il est nécessaire de prendre en compte le moment d'inertie du pendule Θ. De par la conservation de la quantité de mouvement et du moment angulaire, on a alors :

$$mvr = \Theta\omega \quad (3.4)$$

et

$$(m+M)gh = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \quad (3.5)$$

où $\omega \equiv \dot{\phi} = rv_p$ est la vitesse angulaire du pendule après l'impact.
Enfin, on trouve que la vitesse initiale du projectile est donnée par :

$$v = \frac{1}{mr}\sqrt{2g(m+M)\Theta r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}[v] = \text{m}\,\text{s}^{-1} \quad (3.6)$$

On peut vérifier que l'équation (3.6) se réduit bien à l'équation (3.3) si $r = r_{\text{cm}}$ en remplaçant Θ par sa valeur.

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{mr_{\text{cm}}}\sqrt{2g(m+M)(m+M)r_{\text{cm}}^2 r_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))} \\
&= \frac{(m+M)r_{\text{cm}}}{mr_{\text{cm}}}\sqrt{2gr_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))} \\
&= \frac{m+M}{m}\sqrt{2gr_{\text{cm}}(1-\cos(\phi))}
\end{aligned}$$

Cependant, pour résoudre ce système, il reste à déterminer pour le projectile la masse m et r le rayon le plus proche du point de suspension du pendule. En ce qui concerne le pendule, il faut déterminer son moment d'inertie Θ, le rayon de son centre de masse r_{cm} ainsi que l'angle maximal ϕ atteint après

l'impact. Comme m, r sont mesurables directement, que ϕ est mesuré par l'installation et que r_{cm} peut être déterminé géométriquement, il reste à déterminer Θ expérimentalement.

3.1 Détermination du moment d'inertie Θ

On peut déterminer le moment d'inertie du pendule en mesurant dynamiquement sa période d'oscillation. De par la définition du moment de force et la seconde loi de Newton pour la rotation, on a :

$$\ddot{\phi} = -\frac{(m+M)gr_{\text{cm}}}{\Theta}\sin(\phi) \tag{3.7}$$

Qui, pour de petites oscillations, peut s'approximer à :

$$\ddot{\phi} = -\frac{(m+M)gr_{\text{cm}}}{\Theta}\phi \tag{3.8}$$

Ce qui correspond à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation. On peut alors isoler Θ et on obtient :

$$\Theta \pm \delta\Theta = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta t}{n}\right)^2 (m+M)gr_{\text{cm}} \pm \Theta\sqrt{\left(\frac{2\delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\delta r_{\text{cm}}}{r_{\text{cm}}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\delta m^2 + \delta M^2}}{m+M}\right)^2}\,[\Theta] = \text{kg m}^2 \tag{3.9}$$

où Δt est le temps mesuré pour n oscillations complètes.

3.2 Énergie et quantité de mouvement

Enfin, on peut vérifier la conservation de la quantité de mouvement :

$$p \pm \delta p = mv \pm mv\sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{v}\right)^2}\,[p] = \text{kg m s}^{-1} \tag{3.10}$$

de la quantité de moment d'inertie :

$$L \pm \delta L = mvr \pm mvr\sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\delta r}{r}\right)^2}\,[L] = \text{kg m}^2\,\text{s}^{-1} \tag{3.11}$$

et de l'énergie en comparant l'énergie potentielle élastique stockée dans le canon avant le tir avec l'énergie cinétique du projectile juste avant l'impact. À l'aide de la loi de Hooke, la définition du travail W et le théorème du travail d'une force, on peut retrouver l'énergie potentielle U stockée dans le ressort du canon, compressée de x_1 à x_2. On a donc :

$$U \pm \delta U = \frac{k}{2}[x_2^2 - x_1^2 - 2x_0(x_2 - x_1)] \pm U\sqrt{\sum_{i=\{k,x_0,x_1,x_2\}}\left(\frac{\partial U}{\partial i}\delta i\right)^2}\,[U] = \text{J} \tag{3.12}$$

où k est la constante de raideur du ressort et x_0 la position d'équilibre du ressort et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial k} &= \frac{1}{2}\left[x_2^2 - x_1^2 - 2x_0(x_2 - x_1)\right]\delta k \\
\frac{\partial U}{\partial x_0} &= -k(x_2 - x_1)\delta x_0 \\
\frac{\partial U}{\partial x_1} &= k(x_1 - x_0)\delta x_1 \\
\frac{\partial U}{\partial x_2} &= k(x_2 - x_0)\delta x_2
\end{aligned}$$

On peut alors calculer le pourcentage d'énergie transférée du ressort au projectile lors du tir :

$$\epsilon \pm \delta\epsilon = \frac{K_p}{K_e} = \frac{(m+M)r_{\text{cm}}g(1-\cos(\phi))}{\frac{1}{2}mv^2} \pm \epsilon\sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\delta M}{m+M}\right)^2 + \left(\frac{\delta r_{\text{cm}}}{r_{\text{cm}}}\right)^2 + \left(\frac{\delta\phi\sin(\phi)}{1-\cos(\phi)}\right)^2} \tag{3.13}$$

4 Déroulement de l'expérience

Afin de réaliser cette expérience, un canon à ressort est utilisé pour expulser les deux petites balles de masse $m_1 = (23.25 \pm 0.01)\,\text{g}$ et de masse $m_2 = (66.00 \pm 0.01)\,\text{g}$ à travers un pendule physique de masse $M = (196.70 \pm 0.01)\,\text{g}$.
On commence par assembler le système et ajuster la masse du pendule de manière que l'angle ϕ atteint après l'impact soit inférieur à 20°.
Enfin, une fois le projectile placé dans le pendule, on cherche le centre de masse du système. Pour ce faire on utilise les trous au bas de la masse du pendule et le fil à plomb pour trouver les lignes passant par le centre de masse, en traçant 3 lignes, on obtient une bonne approximation du centre de masse du pendule. Les étapes 4.1 et 4.2 sont réalisées pour les masses m_1 et m_2, les indices $j = 1, 2$ seront utilisés pour différencier les deux masses dans les calculs.

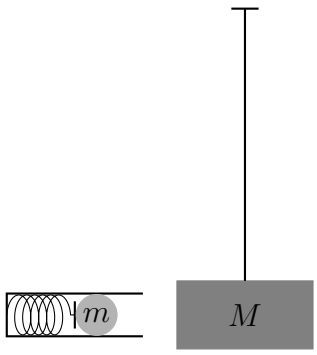


FIGURE 4.1 – Avant le tir

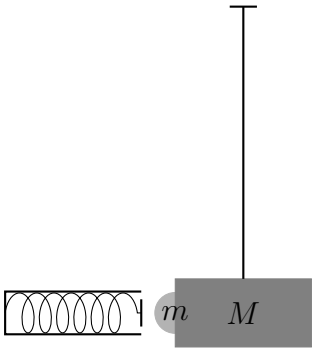


FIGURE 4.2 – Lors du choc

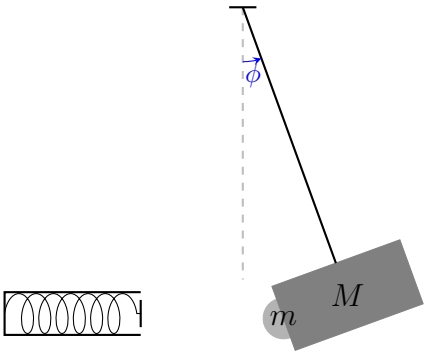


FIGURE 4.3 – Après le choc

FIGURE 4.4 – Montage expérimental avec les trois phases de l'expérience : avant le tir (4.1), lors du choc (4.2) et après le choc (4.3). Le projectile est représenté en gris clair et le pendule en gris foncé.

4.1 Mesure du moment d'inertie Θ

On accroche le pendule de façon à ce qu'il puisse osciller librement. On mesure alors sa période d'oscillation pour des oscillations d'amplitude $< 10°$. On chronomètre le temps nécessaire pour $n = 20$

oscillations complètes. On répète cette mesure 4 fois. On calcule ensuite la moyenne $\Theta \pm \delta\Theta$.

4.2 Détermination de la vitesse initiale v_0

On réassemble le pendule en position devant le lanceur et on mesure $r \pm \delta r$ grâce à l'image sur le lanceur et l'axe du support du pendule. On charge ensuite la balle dans le lanceur et on tire dans le pendule. On mesure l'angle ϕ et on trouve la vitesse initiale $v_0 \pm \delta v_0$. On détermine également la quantité de mouvement p, le moment angulaire incident L, l'énergie cinétique incidente K_{ej} et l'énergie cinétique K_e au pendule. On calcule ainsi le coefficient de transfert ϵ_j pour chaque masse m_j. On répète cette opération 4 fois pour chaque masse.

4.3 Énergie du lanceur

Grâce à un dynamomètre et à la corde tirée pour charger le lanceur, on peut mesurer la force exercée par le ressort en fonction de sa compression, x. On mesure différentes compressions et on plot le graphe afin de trouver la constante de raideur k du ressort ainsi que la position d'équilibre x_0. En mesurant la distance à laquelle la balle est éjectée, on peut calculer l'énergie potentielle élastique U stockée dans le ressort avant le tir.

5 Résultats

5.1 Mesure du moment d'inertie Θ

On détermine le moment d'inertie du pendule grâce à l'équation 3.9 pour la masse m_1 :

$$\Theta = (0.0180 \pm 0.0003)\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{5.1}$$

et pour la masse m_2 :

$$\Theta = (0.0210 \pm 0.0004)\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{5.2}$$

5.2 Détermination de la vitesse initiale v_0

On détermine la vitesse initiale du projectile grâce à l'équation 3.6 pour les masses m_1 et m_2 :

v_0 [m s^{-1}]	**1 : Long**	**2 : Long**	**3 : Medium**	**4 : Short**
m_1	$(6.500 \pm 0.091)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$(6.500 \pm 0.091)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$(4.568 \pm 0.079)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$(3.009 \pm 0.258)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
m_2	$(4.977 \pm 0.056)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$(4.977 \pm 0.056)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$(3.617 \pm 0.045)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$(2.321 \pm 0.036)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

TABLE 5.1 – Vitesse initiale

5.3 Rendement entre l'énergie cinétique incidente et l'énergie potentielle

ϵ	**Long**
m_1	$1.132 * 10^{-1} \pm 5.49 * 10^{-3}$
m_2	$2.68 * 10^{-1} \pm 8.29 * 10^{-3}$

TABLE 5.2 – Rendement d'énergie

5.4 Energie perdu

En calculant la constante du ressort par un graphe de régression linéaire on reçoit W :

$$W = 2.002 \pm 0.072[J] \tag{5.3}$$

Et en prenant l'énergie cinétique K des deux masses et en les comparant on voit une perte d'énergie de :

m_1	m_2
24.47 %	40.8 %

TABLE 5.3 – Perte d'énergie en pourcentage

6 Discussion

Les résultats obtenus montrent une cohérence générale avec le comportement attendu d'un pendule balistique. Les deux valeurs du moment d'inertie, déterminées à partir des masses m_1 et m_2, diffèrent légèrement mais restent du même ordre de grandeur. Cet écart peut être attribué aux incertitudes de mesure de l'angle, aux frottements au pivot ou encore à de petites variations dans la manière dont les projectiles s'accrochent au pendule.
La détermination de la vitesse initiale met en évidence une diminution régulière de v_0 lorsque la course du ressort diminue. Les différences entre m_1 et m_2 sont cohérentes avec le transfert de quantité de mouvement : un projectile plus lourd produit un déplacement angulaire plus faible et donc une vitesse reconstruite plus petite. Les valeurs mesurées restent néanmoins régulières et compatibles avec l'énergie fournie par le ressort.
Le rendement énergétique ϵ est nettement plus élevé pour la masse m_2, ce qui s'explique par une collision proportionnellement moins inélastique : une masse plus grande dissipe une fraction plus faible de son énergie lors de l'impact. Les pertes d'énergie globales, estimées entre 24% et 41%, proviennent principalement du caractère inélastique du choc, des frottements et de la déformation partielle du ressort, qui ne restitue pas toute l'énergie accumulée.

7 Conclusion

Ce TP sur le pendule balistique nous a permis de mieux comprendre la conservation de la quantité de mouvement lors d'une collision inélastique. Mais aussi à mieux comprendre le fonctionnement d'une pendule balistique. En mesurant l'angle du pendule, nous avons pu déterminer la vitesse du projectile et comparer l'énergie avant et après l'impact. On observe qu'une partie de l'énergie cinétique est perdue sous forme de chaleur ou de déformation. Cette situation montre un cas de collisions inélastiques dans une situation réelle.

8 Annexes

- Ballistic Pendulum
- Graphique 1 : Force en fonction de la compression du ressort
- Source : Wikipedia https ://fr.wikipedia.org/wiki/Balistique